

1. (i) $x = \frac{\pi}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin(x - \cos x) = \sin x$.

(ii) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$; $\cos x > 0$ 이므로 $x - \cos x < x$ 이고 $\sin x$ 는 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서 단조증가함수이므로

$$\sin(x - \cos x) < \sin x.$$

(iii) $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$; $\cos x < 0$ 이므로 $x - \cos x > x$ 이고 $\sin x$ 는 $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ 에서 단조감소함수이므로

$$\sin(x - \cos x) < \sin x.$$

<별해> (i) $x = \frac{\pi}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin(x - \cos x) = \sin x$.

(ii) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$; $\cos x > 0$ 이므로 $x - \cos x < x$. 닫힌구간 $[x - \cos x, x]$ 에서 평균값의 정리를 적용하면

$$\sin x - \sin(x - \cos x) = \cos \alpha (x - (x - \cos x)) = \cos \alpha \cos x$$

를 만족하는 α 가 열린구간 $(x - \cos x, x)$ 에 존재한다.

한편, $x - \cos x \geq x - 1 \geq -1$ 이므로 $\cos \alpha > 0$ 이고 $\sin x > \sin(x - \cos x)$ 이다.

(iii) $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$; $\cos x < 0$ 이므로 $x - \cos x > x$. 닫힌구간 $[x, x - \cos x]$ 에서 평균값의 정리를 적용하면

$$\sin(x - \cos x) - \sin x = \cos \alpha ((x - \cos x) - x) = \cos \alpha (-\cos x)$$

를 만족하는 α 가 열린구간 $(x, x - \cos x)$ 에 존재한다. 그러므로

$$x - \cos x \leq x + 1 \leq \pi + 1 \text{ 이므로 } \cos \alpha < 0 \text{ 이고 } \sin x > \sin(x - \cos x) \text{ 이다.}$$

2. 주어진 함수는 원점에 대칭인 함수이므로, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 에서의 정적분 값은 0 이다.

3. (1) $2xf(x) - \cos 2x = 4x^2 \cos 2x - 2x \sin x - \cos 2x$

(2) $2x\{2xf(x) - \cos 2x\} = 8x^3 \cos 2x - 4x^2 \sin x - 4x \cos 2x + \sin x$

(1)의 함수는 y 축에 대칭인 함수, (2)의 함수는 원점에 대칭인 함수임을 쉽게 알 수 있다.

그러므로 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{2xf(x) - \cos 2x\} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [2x\{2xf(x) - \cos 2x\} - f(x)] dx$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{2xf(x) - \cos 2x\} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{4x^2 \cos 2x - 2x \sin x - \cos 2x\} dx \text{ 이다.}$$

한편, $\blacksquare \quad 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x^2 \cos 2x dx = 2[2x^2 \sin 2x + 2x \cos 2x - \sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\pi,$

$\blacksquare \quad -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx = [4x \cos x - 4 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -4,$

$\blacksquare \quad -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = 0$

이므로, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{2xf(x) - \cos 2x\} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [2x\{2xf(x) - \cos 2x\} - f(x)] dx = -2\pi - 4$ 이다.

$$1. \cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{3}-t\right) + \sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right) = \cos\left(t - \left(\frac{\pi}{3}-t\right)\right) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{3}-t\right) - \sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right) = \cos\left(t + \left(\frac{\pi}{3}-t\right)\right) = \frac{1}{2}$$

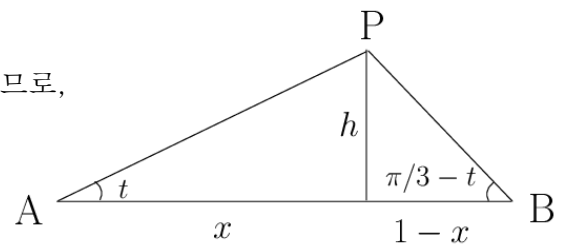
변변 빼서 정리하면, $\sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right) = \frac{1}{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = -\frac{\pi}{3}$, $d = -\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 구하는 답은 $\left\{\frac{1}{2}, 2, -\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{4}\right\}$ 이다.

2. 먼저 삼각형 ABP의 넓이를 구하자. 그림으로부터 $\tan(t) = \frac{h}{x}$, $\tan\left(\frac{\pi}{3}-t\right) = \frac{h}{1-x}$ 이고,

$$\text{따라서 } h = \frac{\tan(t)\tan\left(\frac{\pi}{3}-t\right)}{\tan(t) + \tan\left(\frac{\pi}{3}-t\right)} = \frac{\sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right)}{\sin\left(t + \left(\frac{\pi}{3}-t\right)\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right) \text{ 이므로,}$$

삼각형 ABP의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right)$ 이다.



삼각형 PQR의 넓이 $S(t)$ 는

(삼각형 ABC의 넓이) - (삼각형 PQR의 넓이) - (삼각형 BCQ의 넓이) - (삼각형 CAR의 넓이)
= (삼각형 ABC의 넓이) - 3 \cdot (삼각형 PQR의 넓이)

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)\right) \text{ 이므로,}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} S(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)\right) dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{3}{4} \text{ 이다.}$$

3. 먼저 $P(t)$ 를 구하자. $(x \ln x)' = \ln x + 1$ 이므로 곡선 $y = x \ln x$ 에 $(1, 0)$ 에서 접하는 직선의 기울기는 1이고 직선의 방정식은 $y = x - 1$ 이다. 따라서 부분적분을 이용하면

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_1^t x \ln x - (x - 1) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{2}x dx - \int_1^t x - 1 dx \\ &= \frac{1}{2}t^2 \ln t - \int_1^t \frac{3}{2}x - 1 dx \\ &= \frac{1}{2}t^2 \ln t - \left[\frac{3}{4}x^2 - x\right]_1^t \\ &= \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{3}{4}t^2 + t - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

이다. 그리고 $Q(t)$ 를 구하자. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 이므로 곡선 $y = \ln x$ 에 접하고 $(1, 0)$ 을 지나는 접선의 기울기는 1이고 직선의 방정식은 $y = x - 1$ 이다. 마찬가지로 부분적분을 이용하면

$$Q(t) = \int_1^t (x - 1) - \ln x dx = \frac{1}{2}t^2 - t \ln t - \frac{1}{2}$$

을 얻는다. 한편, 양수 x 에 대하여 $\ln x < x$ 이므로 $\ln x = \ln(\sqrt{x})^2 = 2 \ln \sqrt{x} < 2\sqrt{x}$ 를 얻을 수 있고,

이를 이용하면 $x > 1$ 인 x 에 대하여 $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$ 가 된다. 이때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 이다.

극한값을 구하면,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(t)}{Q(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{3}{4}t^2 + t - \frac{1}{4}}{t\left(\frac{1}{2}t^2 - t \ln t - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln t}{2t} - \frac{3}{4t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{4t^3}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{\ln t}{t} - \frac{1}{2t^2}\right)} = 0$$

임을 알 수 있다.